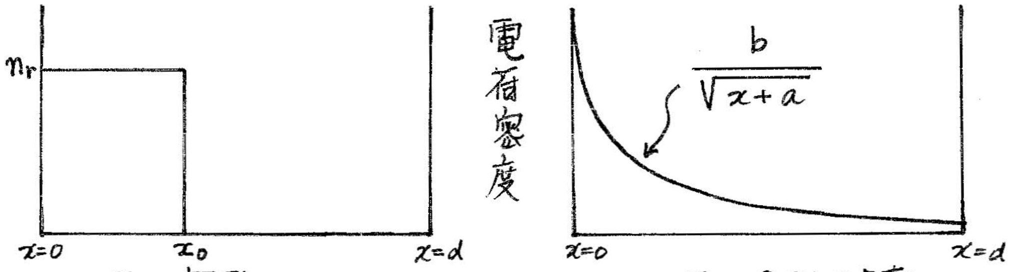
才5章

厳密解

$V=0$の場合には、全ての時間範囲に渡って正確に解ける2つの初期電荷分布があり、これらについて述べる。



I. 矩形　　　II. SCLC分布

上に示した2つの分布の場合に正確に解く事ができる。SCLC分布とは、良く知られている空間電荷制限電流(SCLC)の場合に注入電荷のとる分布である。$V\neq 0$の場合には、これらの場合にも解析的に解を求めるのは困難である。

電荷の動きについて定性的に説明する？

I. 矩形

$$F_0(x)=\frac{en_r}{\varepsilon}\left\{x_0\left(1-\frac{x_0}{2d}\right)-x\right\} \qquad , \quad 0\leq x\leq x_0$$

$$=\frac{-en_r}{2d\varepsilon}x_0^2 \qquad , \quad x_0\leq x\leq d$$

この場合は電荷密度が0の所が存在するので、前述の方法は使えないように見えるが、適当な極限操作で次のようにすれば良いことが分かる。

$$U(\psi_0)=\frac{\varepsilon}{en_r} \quad , \quad U(\psi_d)=\infty$$

ただし、この式が成立するのは、初期$x=x_0$にあった電荷面が$x=d$に到達するまでである。従って、ψ_0, ψ_dは次の式を満たす

$$\frac{d\psi_0}{d\tau}=-\frac{\psi_0+g}{\tau+\frac{\varepsilon}{en_r}}$$

$$\frac{d\psi_d}{d\tau}=0$$

$$\frac{dg}{d\tau}=\frac{1}{2d}(\Psi_0-\Psi_d)(\Psi_0+\Psi_d+2g)$$

上の3式を用いれば

$$\frac{dg}{d\tau}=-\frac{1}{2d}\frac{d}{d\tau}\left(\tau+\frac{\varepsilon}{en_r}\right)(\Psi_0-\Psi_d)^2$$

$$\Psi_d=-\frac{en_r}{2d\varepsilon}x_0^2$$

$$\therefore\quad g=-\frac{1}{2d}\left(\tau+\frac{\varepsilon}{en_r}\right)(\Psi_0-\Psi_d)^2-\Psi_d$$

ここで $g(0)=0$ を用いて積分した。この g を Ψ_0 の式に代入すれば

$$\frac{d}{d\tau}(\Psi_0-\Psi_d)=-\frac{\Psi_0-\Psi_d}{\tau+\frac{\varepsilon}{en_r}}+\frac{1}{2d}(\Psi_0-\Psi_d)^2$$

ここで，Ψ_d が定数であることを用いた。これはベルヌーイの方程式で簡単に解けて次のようになる

$$\Psi_0-\Psi_d=\frac{1}{\left(\tau+\frac{\varepsilon}{en_r}\right)\left(\frac{1}{x_0}-\frac{1}{2d}\ln\left(1+\frac{en_r\tau}{\varepsilon}\right)\right)}$$

この式の成立する時間範囲を調べるため，x_0 からでた流線の運動を調べる。

$$x=x_0-\Psi_d\tau-\int_0^\tau g\,d\tau$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{x_0}-\frac{1}{2d}\ln\left(1+\frac{en_r}{\varepsilon}\tau\right)}$$

これから．$x=d$ とすることにより．到達する時間 τ_d は

$$\tau_d=\frac{\varepsilon}{en_r}\left[\exp\left[2\left(\frac{d}{x_0}-1\right)\right]-1\right]$$

$$\frac{dg}{d\tau} = \frac{1}{2d}\,\frac{1}{\left(\tau+\frac{\varepsilon}{en_r}\right)^2\left(\frac{1}{x_0}-\frac{1}{2d}\ln\left(1+\frac{en_r\tau}{\varepsilon}\right)\right)^2}$$

$$\times\left(1-\frac{1}{\frac{d}{x_0}-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{en_r\tau}{\varepsilon}\right)}\right)$$

また. $$I(t) = \varepsilon\mu^* \exp\left[-\frac{2}{\varepsilon}\int_0^t \mu^*\gamma\,dt\right]\frac{dg}{d\tau}$$

上から、$\tau=\tau_d$ で I は 0 となる。その以後では、電流は 0 となる。この事は次に示すように、電荷が一様に拡がる事から明らかである。

$$\rho^* = -\varepsilon\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\varepsilon F_0'(x+\psi\tau+\int_0^\tau g\,d\tau)}{\tau F_0'(x+\psi\tau+\int_0^\tau g\,d\tau)-1}$$

$$= \frac{en_r}{1+\frac{en_r\tau}{\varepsilon}}$$

以上の展開において，次の事が暗黙に仮定されている。すなわち、初期において，$x_0\leq x\leq d$ では電荷が存在しないという事は、一様に存在するとした深いトラップに存在する電荷 n_d そのものが無いということを意味する。この事に注意し，電導率 σ および，実効移動度が次の形であるとすれば

$$\sigma = \sigma_0\exp\left(-\frac{W_c}{kT}\right)$$

$$\mu^* = \mu_0^*\exp\left(-\frac{W_{EM}}{kT}\right)$$

電流 I は次のように書きかえられる

$$I(t) = \varepsilon\mu_0^*\exp\left[-\frac{W_{EM}}{kT}-\frac{2}{\varepsilon}\sigma_0\int_0^t e^{-\frac{W_c}{kT}}dt\right]\frac{dg}{d\tau}$$

ここでは、$n_d=0$ として，$\mu^*\gamma=\sigma$ を用いた。これは $dg/d\tau$ がほとんど

一定とみなすことのできる，電流立上り部分では，$W_{EM} \neq W_C$ である事を除いて，双極子の脱分極を表わす式と同形である。

オーミックな伝導を考えない場合にはTSC電荷量Q_{TSC}は

$$q = \frac{1}{\varepsilon\beta}\int_{T_0}^{T} I \, dT$$

の関係を用いれば容易に求められる。

$$q = -\frac{1}{2d}\frac{1}{\left(\tau+\frac{\varepsilon}{en_r}\right)\left(\frac{1}{x_0}-\frac{1}{2d}\ln\left(1+\frac{en_r}{\varepsilon}\tau\right)\right)^2} + \frac{en_r x_0^2}{2d\varepsilon}$$

さらに

$$Q_{TSC} = \lim_{\tau\to\tau_d} \varepsilon q(\tau)$$

$$= \frac{en_r x_0^2}{2d} - \frac{den_r}{2} \exp\left(2-2\frac{d}{x_0}\right)$$

全電荷Q_tは$en_r x_0$であるから，Q_{TSC}とQ_tの比は

$$\frac{Q_{TSC}}{Q_t} = \frac{x_0}{2d} - \frac{d}{2x_0}\exp\left(2-2\frac{d}{x_0}\right)$$

このようにx_0/dにだけ依存する。

II SCLC 分布

$$\rho_0(x) = \frac{b}{\sqrt{\frac{x}{d} + a}}$$

$$F_0(x) = \frac{2db}{\varepsilon}\left[\frac{2}{3}(a+1)^{3/2} - \frac{2}{3}a^{3/2} - \left(\frac{x}{d} + a\right)^{1/2}\right]$$

全電荷 Q_t および 平均注入距離 $\bar{x}$ は

$$Q_t = \int_0^d \rho_0(x)dx = \varepsilon\left(F_0(0) - F_0(d)\right) = 2db\left[(a+1)^{1/2} - a^{1/2}\right]$$

$$\bar{x} = \frac{1}{Q_t}\int_0^d x\rho_0(x)dx = -\frac{1}{Q_t}\varepsilon F_0(d)d$$

$$= d\ \frac{(a+1)^{1/2} + \frac{2}{3}a^{3/2} - \frac{2}{3}(a+1)^{3/2}}{(a+1)^{1/2} - a^{1/2}}$$

普通、SCLC においては、注入電極における電界を 0 とおく，これは $a=0$ に対応し、この時 $\bar{x} = d/3$ となる。 $\bar{x}$ は a とともに増加し $a \to \infty$ にしたがって $\bar{x} \to d/2$ となり，この場合は、極端に $\bar{x}$ が小さいものは表現できず，矩形の場合と対照的である。

$$U(\psi) = \frac{-1}{F_0'(F_0^{-1}(\psi))} = -\frac{\varepsilon^2}{2db^2}\psi + \frac{2\varepsilon}{3b}\left[(a+1)^{3/2} - a^{3/2}\right]$$

となる。ここで

$$\phi_i \equiv \tau + U(\psi_i)$$

$$G \equiv -\frac{\varepsilon^2}{2db^2}g - \frac{2\varepsilon}{3b}\left[(a+1)^{3/2} - a^{3/2}\right] - \tau$$

$$i = 0,\ \alpha\ ,\ d$$

とおけば，Φ_i，G は次の微分方程式を満たす．

$$\frac{d}{d\tau}\Phi_i = -\frac{G}{\Phi_i} \qquad i = 0,\ \text{or},\ d$$

$$\frac{d}{d\tau}G = -1 - \frac{b^2}{\varepsilon^2}(\Phi_0 - \Phi_d)(\Phi_0 + \Phi_d + 2G)$$

初期条件は．

$$\Phi_0(0) = \frac{\varepsilon}{b}a^{1/2}, \qquad \Phi_d(0) = \frac{\varepsilon}{b}(a+1)^{1/2}$$

$$G(0) = -\frac{2\varepsilon}{3b}\left\{(a+1)^{3/2} - a^{3/2}\right\}$$

上の第一の式から

$$\Phi_0^2(\tau) - \Phi_d^2(\tau) = -\frac{\varepsilon^2}{b^2}$$

第2式に代入して

$$\frac{d}{d\tau}G = -2\frac{b^2}{\varepsilon^2}(\Phi_0 - \Phi_d)G$$

$$= \frac{2b^2}{3\varepsilon^2}\frac{d}{d\tau}(\Phi_0^3 - \Phi_d^3)$$

$$\therefore \quad G(\tau) = \frac{2b^2}{3\varepsilon^2}(\Phi_0^3 - \Phi_d^3)$$

これを再び最初の式に入れれば

$$\frac{d}{d\tau}(\Phi_0^2 + \Phi_d^2) = -4G = -\frac{8b^2}{3\varepsilon^2}(\Phi_0^3 - \Phi_d^3)$$

この式において　$u = \Phi_0 - \Phi_d$，$v = \Phi_0 + \Phi_d$　とおくと

$$\frac{d}{d\tau}\frac{1}{2}(u^2 + v^2) = -\frac{8b^2}{3\varepsilon^2}u\frac{u^2 + 3v^2}{4}$$

$$\therefore \quad \left(u - \frac{\varepsilon^4}{b^4}\frac{1}{u^3}\right)\frac{du}{d\tau} = -\frac{2b^2}{3\varepsilon^2}u\left(u^2 + \frac{3\varepsilon^4}{b^4}\frac{1}{u^2}\right)$$

となる。ここでは、$u \cdot v = -\frac{\varepsilon^2}{b^2}$ の関係を用いた。これを整理すれば

$$-\frac{2b^2}{3\varepsilon^2}\tau=\int_{u_0}^{u}\frac{u^4-\frac{\varepsilon^4}{b^4}}{u^2\left(u^4+3\frac{\varepsilon^4}{b^4}\right)}\,du$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u_0}\right)+\frac{2b}{3\sqrt{2\sqrt{3}}\cdot\varepsilon}\left\{\arctan\left(\frac{\sqrt{2\sqrt{3}}\cdot\frac{\varepsilon}{b}u_0}{u_0^2-\sqrt{3}\frac{\varepsilon^2}{b^2}}\right)\right.$$

$$-\arctan\left(\frac{\sqrt{2\sqrt{3}}\frac{\varepsilon}{b}u}{u^2-\sqrt{3}\frac{\varepsilon^2}{b^2}}\right)+\ln\frac{\left(u^4+3\frac{\varepsilon^4}{b^4}\right)^{1/2}}{\left(u_0^4+3\frac{\varepsilon^4}{b^4}\right)^{1/2}}$$

$$\left.+\ln\frac{\left(u_0+\frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{2}\frac{\varepsilon}{b}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\varepsilon^2}{b^2}}{\left(u+\frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{2}\frac{\varepsilon}{b}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\varepsilon^2}{b^2}}\right\}$$

ここで $u_0=u(\tau=0)$ である。これにより，u は τ によって陰に決定され，微分方程式の解が得られた。

$$\frac{dg}{d\tau}=\frac{2db^4}{\varepsilon^4}(\Phi_0-\Phi_d)(\Phi_0+\Phi_d+2G)$$

$$=\frac{2db^6}{3\varepsilon^6}u^4$$

これより電流 $I(t)$ は次のように表わされる

$$I(t)=\frac{2db^6}{3\varepsilon^6}u^4\varepsilon\mu^*\exp\left[-\frac{2}{\varepsilon}\int_0^t\mu^*\gamma\,dt\right]$$

上の τ と u の関係を次のように近似する。まず右辺における長時間における主要な項は才一項である。才二項は，

$$\frac{4}{3}\int_{u_0}^{u}\frac{u^2}{u^4+3\frac{\varepsilon^4}{b^4}}\,du$$

であり，$u\to0$ ($\tau\to\infty$) となることから，これは常に有限である。従って，才二項を無視して，次のような近似が才一に成立するであろう。

$$-\frac{2b^2}{3\varepsilon^2}\tau = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u_0}\right)$$

才二近似として，このuを才二項に代入したものを考える事ができる。このようにして逐次近次を高次まで進めることができる。

$$g = -\frac{2db^2}{\varepsilon^2}G + \frac{4db}{3\varepsilon}\left[-(a+1)^{3/2} + a^{3/2}\right] + \frac{-2db^2}{\varepsilon^2}\tau$$

$$= -\frac{4db^4}{3\varepsilon^4}(\phi_0^3 - \phi_d^3) + \frac{4db}{3\varepsilon}\left[-(a+1)^{3/2} + a^{3/2}\right] + \frac{-2db^2}{\varepsilon^2}\tau$$

$$= -\frac{db^4}{3\varepsilon^4}\left(u^3 + \frac{3\varepsilon^4}{b^4}\frac{1}{u}\right) + \frac{4db}{3\varepsilon}\left[-(a+1)^{3/2} + a^{3/2}\right] + \frac{-2db^2}{\varepsilon^2}\tau$$

であるが．$n_d = 0$ とすれば g は I と次の簡単な関係を持つ．

$$g = \frac{1}{\varepsilon\beta}\int_{T_0}^{T} I\,dT$$

普通．TSCを時間積分したものは．TSC電荷量又は ultimate charge と呼ばれるもので重要な量である。それをQ_{TSC}と書けば

$$Q_{TSC} = \lim_{\tau\to\infty} \varepsilon g(\tau) = -\frac{d\varepsilon}{u_0} + \frac{2db}{\sqrt{2\sqrt{3}}}\left\{\arctan\left(\frac{\sqrt{2\sqrt{3}}\,\frac{\varepsilon}{b}u_0}{u_0^2 - \sqrt{3}\,\frac{\varepsilon^2}{b^2}}\right)\right.$$

$$\left. -\arctan(0) + \ln\frac{\left(u_0 + \frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{2}\frac{\varepsilon}{b}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\varepsilon^2}{b^2}}{\left(u_0^4 + 3\frac{\varepsilon^4}{b^4}\right)^{1/2}}\right\} + \frac{4db}{3\varepsilon}\left[a^{3/2} - (a+1)^{3/2}\right]$$

さらに全電荷の内Q_{TSC}として現われる割合は，$u_0 = \frac{\varepsilon}{b}\left(a^{1/2} - (a+1)^{1/2}\right)$

$$\frac{Q_{TSC}}{Q_t} = \frac{1}{2\left[a^{1/2} - (a+1)^{1/2}\right]^2} + \frac{-2}{3}\left[2a + 1 + a^{1/2}\cdot(a+1)^{1/2}\right]$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{3}}}\,\frac{1}{(a+1)^{1/2} - a^{1/2}}\left\{\arctan\left(\frac{\sqrt{2\sqrt{3}}\,(a^{1/2} - (a+1)^{1/2})}{(a^{1/2} - (a+1)^{1/2})^2 - \sqrt{3}}\right)\right.$$

$$\left. + \ln\frac{\left[(a^{1/2} - (a+1)^{1/2}) + \frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{2}\right]^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\left[(a^{1/2} - (a+1)^{1/2})^4 + 3\right]^{1/2}}\right\}$$