第4章

初期立ち上がりの近似的取り扱い.

次のように級数展開による。

$$g(\tau) = \sum_{i=1} g_i \tau^i$$

$$\psi_o(\tau) = \psi_o(0) + \sum_{i=1} P_{oi} \tau^i$$

$$\psi_d(\tau) = \psi_d(0) + \sum_{i=1} P_{di} \tau^i$$

$U(\psi)$ をそれぞれ $\psi_o(0)$, $\psi_d(0)$ のまわりで展開する。

$$U(\psi) = U(\psi_{o(0)}) + \sum_{i=1} e_{oi} (\psi - \psi_{o(0)})^i$$

$$= U(\psi_{d(0)}) + \sum_{i=1} e_{di} (\psi - \psi_{d(0)})^i$$

従って

$$U(\psi_o) = U(\psi_o(0)) + \sum_{i=1} e_{oi} \Big(\sum_{j=1} P_{oj} \tau^j\Big)^i$$

$$= U(\psi_o(0)) + \sum_{i=1} C_{oi} \tau^i$$

ただし,

$$C_{o1} = e_{o1} P_{o1}$$

$$C_{o2} = e_{o2} P_{o1}^2 + e_{o1} P_{o2}$$

$$C_{o3} = e_{o3} P_{o1}^2 + 2 e_{o2} P_{o1} P_{o2} + e_{o1} P_{o3}$$

などとなり、$o \to d$ と置き換えることにより $U(\psi_d)$ を得ることができる。

$$(\tau + U(\psi)) \frac{d\psi}{d\tau} = -(\psi + g)$$

に代入して

$$\Big(\tau + U(\psi_o(0)) + \sum_{i=1} C_{oi} \tau^i\Big) \sum_{i=1} P_{oi} \cdot i \cdot \tau^{i-1}$$

$$= -\Big\{\psi_o(0) + \sum_{i=1} (P_{oi} + g_i) \tau^i\Big\}$$

同じべきの項を比較して

$$U(\Psi_o(0))\,P_{o1} = -\Psi_o(0)$$

$$2\,U(\Psi_o(0))P_{o2} + (1+C_{o1})P_{o1} = -P_{o1} - g_1$$

$$3\,U(\Psi_o(0))P_{o3} + 2(1+C_{o1})P_{o2} + C_{o2}P_{o1} = -P_{o2} - g_2$$

$$4\,U(\Psi_o(0))\,P_{o4} + 3(1+C_{o1})P_{o3} + 2C_{o2}P_{o2} + C_{o3}P_{o1} = -P_{o3} - g_3$$

$o \to d$ と置き換えれば Ψ_d に関する式が得られる

$$\frac{dg}{d\tau} = \frac{1}{2d}(\Psi_o - \Psi_d)(\Psi_o + \Psi_d + 2g)$$

に代入して

$$\sum_{i=1} i\cdot g_i \tau^{i-1} = \frac{1}{2d}\left(\Psi_o(0) - \Psi_d(0) + \sum_{i=1}(P_{oi} - P_{di})\tau^i\right)$$

$$\times\left(\Psi_o(0) + \Psi_d(0) + \sum_{i=1}(P_{oi} + P_{di} + 2g_i)\tau^i\right)$$

よって

$$g_1 = \frac{1}{2d}(\Psi_o(0) - \Psi_d(0))(\Psi_o(0) + \Psi_d(0))$$

$$2g_2 = \frac{1}{2d}(\Psi_o(0) - \Psi_d(0))(P_{o1} + P_{d1} + 2g_1) + \frac{1}{2d}(\Psi_o(0) + \Psi_d(0))(P_{o1} - P_{d1})$$

$$3g_3 = \frac{1}{2d}(\Psi_o(0) - \Psi_d(0))(P_{o2} + P_{d2} + 2g_2) + \frac{1}{2d}(P_{o1} - P_{d1})(P_{o1} + P_{d1} + 2g_1) + \frac{1}{2d}(\Psi_o(0) + \Psi_d(0))(P_{o2} - P_{d2})$$

等の式が成り立つ。従って

$$P_{o1} = \frac{-\Psi_o(0)}{U(\Psi_o(0))}, \qquad P_{d1} = \frac{-\Psi_d(0)}{U(\Psi_d(0))}$$

ここで，$F_0(x)$，$\rho(x)$ を用いて書き換えると

$$\Psi_0(0)=F_0(0)\ ,\qquad \Psi_d(0)=F_0(d)$$
$$U(\Psi_0(0))=\frac{\varepsilon}{\rho(0)}\ ,\quad U(\Psi_d(0))=\frac{\varepsilon}{\rho(d)}$$

であるから

$$P_{01}=-\frac{1}{\varepsilon}F_0(0)\rho(0)\ ,\qquad P_{d1}=-\frac{1}{\varepsilon}F_0(d)\rho(d)$$

同様に

$$g_1=\frac{1}{2d}\left(F_0^2(0)-F_0^2(d)\right)$$

$$2g_2=-\frac{1}{d\varepsilon}F_0^2(0)\rho(0)+\frac{1}{d\varepsilon}F_0^2(d)\rho(d)+\frac{1}{2d^2}(F_0(0)-F_0(d))(F_0^2(0)-F_0^2(d))$$

一次の精度で，Ψ_0，Ψ_d を表すと

$$\Psi_0\simeq F_0(0)-\frac{1}{\varepsilon}F_0(0)\rho(0)\tau\ ,\quad \Psi_d\simeq F_0(d)-\frac{1}{\varepsilon}F_0(d)\rho(d)\tau$$

よって

$$\Psi_0-\Psi_d\simeq F_0(0)-F_0(d)-\frac{\tau}{\varepsilon}\left(F_0(0)\rho(0)-F_0(d)\rho(d)\right)$$

$$\simeq\frac{F_0(0)-F_0(d)}{1+\dfrac{\tau}{\varepsilon}\dfrac{F_0(0)\rho(0)-F_0(d)\rho(d)}{F_0(0)-F_0(d)}}\equiv\frac{F_0(0)-F_0(d)}{1+\dfrac{\tau}{\varepsilon}\bar{\rho}}$$

ただし $$\bar{\rho}=\frac{F_0(0)\rho(0)-F_0(d)\rho(d)}{F_0(0)-F_0(d)}$$

上の定義から，$\bar{\rho}$ は，各界面電界によって界面における電荷密度を重みつけ平均した量である。次に g_1，g_2 が上のとおりであるとして

$$g(\tau)\simeq g_1\tau+g_2\tau^2$$

となる。よって

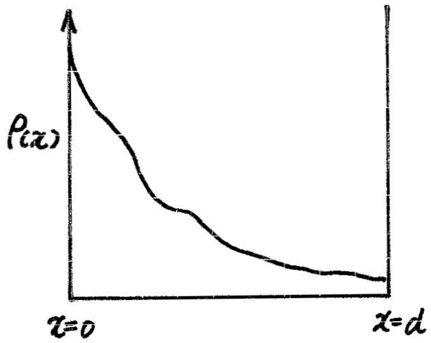
$$\frac{dg}{d\tau} = g_1 + 2g_2\tau$$

ここで，g_2，g_1の符号の関係について考えてみよう。
右図のような電荷分布であったと考えると

$$\rho(x) < \rho(y) \quad , \quad x > y$$

$$|F_0(0)| > |F_0(d)|$$

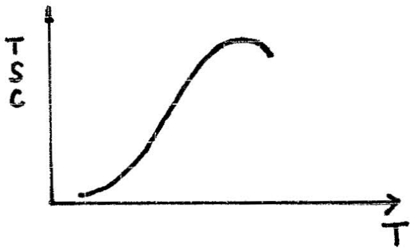
が成り立つから



$$2g_2 = \frac{1}{2d^2}(F_0^2(0) - F_0^2(d))\left[F_0(0) - F_0(d) - \frac{d}{\varepsilon}\rho(0)\right]$$

$$-\frac{1}{2d\varepsilon}\rho(0)\,(F_0^2(0) - F_0^2(d)) + \frac{1}{d\varepsilon}F_0^2(d)\,(\rho(d) - \rho(0))$$

を用いれば　$g_2 < 0$　であることが分かる，一方 $g_1 > 0$　であるから．
$dg/d\tau$ において，$2g_2\tau$という項は電流の減少に寄与するものである。
右図のように，温度の上昇とともに，T.S.C. は増加するが，十分温度が高くなると，$2g_2\tau$ が大きくなり、しだいにT.S.C.の増加を抑制するようになり，最終的にピークを形成するに到る。
このように，単調な電荷分布においては，g_1とg_2の符号が逆であることにより，ピークが起こる事が分かる。この時，次のような変形を行なってみよう．



$$\frac{dg}{d\tau} \simeq g_1\left(1 + \frac{2g_2}{g_1}\tau\right) = g_1\left(1 - \frac{2|g_2|}{|g_1|}\tau\right)$$

$$= g_1\left(1 - \frac{2\varepsilon|g_2|}{\bar{\rho}|g_1|}\,\frac{\tau}{\varepsilon}\bar{\rho}\right) \simeq \frac{g_1}{\left(1 + \frac{\tau}{\varepsilon}\bar{\rho}\right)^m}$$

ただし

$$m = \frac{2\varepsilon|g_2|}{\bar{\rho}|g_1|}$$

この式から分かるように、mという量はピークの鋭さを決定する重要なものである。ちなみに、$x=0$に非常に片寄った電荷分布の場合には、

$$\rho(0) \gg \rho(d) \quad , \quad |F_0(0)| \gg |F_0(d)|$$

となるから、容易に

$$\bar{\rho} \simeq \rho(0)$$
$$g_1 \simeq \frac{1}{2d} F_0^2(0)$$
$$g_2 \simeq -\frac{1}{d\varepsilon} F_0^2(0)\, \rho(0)$$

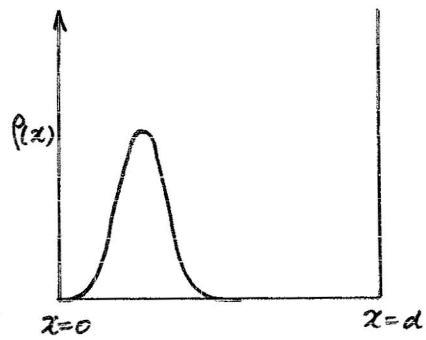
となる事が分かるから

$$m \simeq 2$$

となり、これは前述の矩形分布の場合と一致している。

次にg_1, g_2の符号が同一になる例として右図のような分布を考えよう。この時、界面における電荷密度$\rho(0)$, $\rho(d)$は非常に小さくなるので、g_2は近似的に

$$g_2 \simeq \frac{1}{4d^2}(F_0(0)-F_0(d))(F_0^2(0)-F_0(d)^2)$$



と書けるので、今は負電荷を考えているので、g_1とg_2は同符号である。従って、この場合$2g_2$という項は、T.S.C.をさらに増加する効果を持つことになる。さらに高次の項が減少に寄与することになる。

T.S.C. スペクトルのピーク以後の挙動

一般に注入電荷の分布は、初期分布がいかなるものにせよ充分高温に到れば しだいに平坦となり、それに対応してT.S.C.はある程度普遍的な振舞いをするようになる事が期待される。ピーク以後の性質を級数展開により調べる

$$\lim_{\tau\to\infty} g(\tau) = g_\infty$$

とすれば、$-\varphi_0, -\varphi_d$ も同じ値に接近する事から、g, φ_0, φ_d は

$$g(\tau) = g_\infty + \sum_{i=1} \frac{g_i}{(\tau+c)^i}$$

$$\varphi_0(\tau) = -g_\infty + \sum_{i=1} \frac{P_{0i}}{(\tau+c)^i}$$

$$\varphi_d(\tau) = -g_\infty + \sum_{i=1} \frac{P_{di}}{(\tau+c)^i}$$

と展開されるであろう。ここで g_i, P_{0i}, P_{di} は展開の係数である。またCは、展開がなるべく小数の項により近似されるように選ぶ。次に $U(\varphi)$ を

$$U(\varphi) = \sum_{i=0} e_i(\varphi + g_\infty)^i$$

と展開する。結果は次のようになる

$$g(\tau) = g_\infty + \frac{e_1 d^2}{36}\frac{1}{(\tau+e_0)^3} + \frac{e_3 d^4}{400}\frac{1}{(\tau+e_0)^5} + \cdots$$

$$\varphi_0(\tau) = -g_\infty + \frac{d}{2}\frac{1}{(\tau+e_0)} - \frac{e_1 d^2}{9}\frac{1}{(\tau+e_0)^3} - \frac{e_3 d^3}{24}\frac{1}{(\tau+e_0)^4} + \left(\frac{e_1^2 d^3}{18} - \frac{3e_3 d^4}{200}\right)\frac{1}{(\tau+e_0)^5} + \cdots$$

$$\varphi_0(\tau) = -g_\infty - \frac{d}{2}\frac{1}{(\tau+e_0)} - \frac{e_1 d^2}{9}\frac{1}{(\tau+e_0)^3} + \frac{e_2 d^3}{24}\frac{1}{(\tau+e_0)^4} - \left(\frac{e_1^2 d^3}{18} + \frac{3 e_3 d^4}{200}\right)\frac{1}{(\tau+e_0)^5} + \cdots$$

展開係数の決定

$$U(\Psi_0)=\sum_{i=0} e_i\left(\sum_{j=1}\frac{P_{0j}}{(\tau+C)^j}\right)^i \equiv \sum_{i=0}\frac{C_{0i}}{(\tau+C)^i}$$

とすれば，C_{0i} は次のように表わせる

$$C_{00}=e_0$$
$$C_{01}=e_1P_{01}$$
$$C_{02}=e_2P_{01}^2+e_1P_{02}$$
$$C_{03}=e_3P_{01}^3+2e_2P_{01}P_{02}+e_1P_{03}$$
$$C_{04}=e_4P_{01}^4+3e_3P_{01}^2P_{02}+e_2(2P_{01}P_{03}+P_{02}^2)+e_1P_{04}$$
$$C_{05}=e_5P_{01}^5+4e_4P_{01}^3P_{02}+3e_3(P_{01}P_{02}^2+P_{01}^2P_{03})+2e_2(P_{01}P_{04}+P_{02}P_{03})+e_1P_{05}$$

以下同様である。また $U(\Psi_d)$ についても $0\to d$ と置き換えることにより，同様の式が得られる。以上の式を

$$(\tau+U(\Psi_0))\frac{d\Psi_0}{d\tau}=-(\Psi_0+g)$$

に代入すれば

$$\left(\tau+e_0+\sum_{i=1}\frac{C_{0i}}{(\tau+C)^i}\right)\left(-\sum_{i=1}\frac{iP_{0i}}{(\tau+C)^{i+1}}\right)$$

$$=-\sum_{i=1}\frac{P_{0i}+g_i}{(\tau+C)^i}$$

従って
$$\sum_{i=1}\frac{iP_{0i}}{(\tau+C)^i}+(e_0-C)\sum_{i=1}\frac{iP_{0i}}{(\tau+C)^{i+1}}$$
$$+\sum_{i=2}\frac{1}{(\tau+C)^{i+1}}\sum_{m+n=i}(C_{0m}\cdot n\cdot P_{0n})=\sum_{i=1}\frac{P_{0i}+g_i}{(\tau+C)^i}$$

同じべきの係数を比較して

$$P_{01}+g_1 = P_{01}$$
$$P_{02}+g_2 = 2P_{02} + (e_0-c)P_{01}$$
$$P_{03}+g_3 = 3P_{03} + 2(e_0-c)P_{02} + P_{01}C_{01}$$
$$P_{04}+g_4 = 4P_{04} + 3(e_0-c)P_{03} + C_{02}P_{01} + 2P_{02}C_{01}$$
$$P_{05}+g_5 = 5P_{05} + 4(e_0-c)P_{04} + C_{03}P_{01} + 2P_{02}C_{02} + 3P_{03}C_{01}$$

同様の式が $0\to d$ として成立する。

$$\frac{dg}{d\tau} = \frac{1}{2d}(\Psi_0-\Psi_d)(\Psi_0+\Psi_d+2g)$$

に代入して

$$-\sum_{i=1}\frac{ig_i}{(\tau+c)^{i+1}} = \frac{1}{2d}\sum_{i=1}\frac{P_{0i}-P_{di}}{(\tau+c)^i}\sum_{i=1}\frac{P_{0i}+P_{di}+2g_i}{(\tau+c)^i}$$
$$=\frac{1}{2d}\sum_{i=2}\frac{1}{(\tau+c)^i}\sum_{m+n=i}(P_{0m}-P_{dm})(P_{0n}+P_{dn}+2g_n)$$

$$\therefore\quad -(i-1)g_{i-1} = \sum_{m+n=i}\frac{1}{2d}(P_{0m}-P_{dm})(P_{0n}+P_{dn}+2g_n)$$

以上で必要な式はそろった。ただちに，各々の最初の式を用いて

$$g_1 = 0$$

が分かる。次に界面における電界の符号から $P_{01}>0$, $P_{d1}<0$ であるから

$$P_{d1} = -P_{01}$$

も分かる。次に2番目から

$$g_2 = 0$$

が，cの値に無関係に得られるが，P_{02}，P_{d2} を0とするために

$$c = e_0$$

でなければならない。従って

$$g_2 = P_{02} = P_{d2} = 0 \quad \text{ただし} \quad C = e_0$$

3番目から

$$g_3 = 2P_{03} + e_1 P_{01}^2 = 2P_{d3} + e_1 P_{d1}^2$$

$$-3g_3 = \frac{1}{2d}(P_{01} - P_{d1})(P_{03} + P_{d3} + 2g_3)$$

これから

$$P_{03} = P_{d3} = -e_1 P_{01}^2 \frac{3 + 2\frac{P_{01}}{d}}{6\left(1 + \frac{P_{01}}{d}\right)}$$

$$g_3 = +e_1 P_{01}^2 \frac{\frac{P_{01}}{d}}{3\left(1 + \frac{P_{01}}{d}\right)}$$

. 4番目から

$$g_4 = 3P_{04} + e_2 P_{01}^3 = 3P_{d4} + e_2 P_{d1}^3$$

$$-4g_4 = \frac{1}{2d}(P_{01} - P_{d1})(P_{04} + P_{d4} + 2g_4)$$

これから $g_4 = 0$ となり、従って

$$P_{04} = -\frac{e_2 P_{01}^3}{3}, \quad P_{d4} = -\frac{e_2 P_{d1}^3}{3}$$

5番目から

$$\begin{aligned} g_5 &= 4P_{05} + C_{03} P_{01} + 3P_{03} C_{01} \\ &= 4P_{05} + e_3 P_{01}^4 + 4e_1 P_{01} P_{03} \\ &= 4P_{d5} + e_3 P_{d1}^4 + 4e_1 P_{d1} P_{d3} \end{aligned}$$

$$-5g_5 = \frac{1}{2d}(P_{01} - P_{d1})(P_{05} + P_{d5} + 2g_5)$$

よって

$$g_5 = e_3 P_{01}^4 \frac{\frac{P_{01}}{2d}}{5\left(1 + \frac{P_{01}}{2d}\right)}$$

$$P_{o5} = -e_3 P_{o1}^4 \frac{5 + 4\frac{P_{o1}}{2d}}{20\left(1 + \frac{P_{o1}}{2d}\right)} - e_1 P_{o1} P_{o3}$$

$$P_{d5} = -e_3 P_{o1}^4 \frac{5 + 4\frac{P_{o1}}{2d}}{20\left(1 + \frac{P_{o1}}{2d}\right)} + e_1 P_{o1} P_{o3}$$

ここで，次の考察により P_{o1} を決定できる

$$\varphi_0 = F_0\left(\varphi_0 \tau + \int_0^\tau g\, d\tau\right)$$

$$\varphi_d = F_0\left(d + \varphi_d \tau + \int_0^\tau g\, d\tau\right)$$

であり．φ_0, φ_d の $\tau \to \infty$ の極限は共に $-g_\infty$ であるから，F_0 の引数の極限も等しくなくてはならない。

$$\varphi_0 \tau + \int_0^\tau g\, d\tau \xrightarrow[\tau\to\infty]{} -g_\infty \tau + P_{o1} + \int_0^\tau g\, d\tau$$

$$d + \varphi_d \tau + \int_0^\tau g\, d\tau \longrightarrow d - g_\infty \tau + P_{d1} + \int_0^\tau g\, d\tau$$

従って，両者を等しくおくと

$$P_{o1} = \frac{d}{2}$$

となる。これを用いて，上の結果を整理すると

$$g_1 = 0, \quad P_{o1} = -P_{d1} = \frac{d}{2}$$

$$g_2 = P_{o2} = P_{d2} = 0$$

$$g_3 = \frac{e_1 d^2}{36}, \quad P_{o3} = P_{d3} = -\frac{e_1 d^2}{9}$$

$$g_4 = 0, \quad P_{o4} = -\frac{e_2 d^3}{24}, \quad P_{d4} = \frac{e_2 d^3}{24}$$

$$g_5 = \frac{e_3 d^4}{400}, \quad P_{o5} = -\frac{3 e_3 d^4}{200} + \frac{e_1^2 d^3}{18}$$

$$P_{d5} = -\frac{3 e_3 d^4}{200} + \frac{-e_1^2 d^3}{18}$$