第3章

基礎理論

まず，連続の式とポアソンの式だけを考える事にする

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial \tau} = \frac{\partial F^* \rho^*}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F^*}{\partial x} = -\frac{1}{\varepsilon}\rho^*$$

ここで流れ関数ψを次のように定義する

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{1}{\varepsilon}\rho^* , \quad \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = -\frac{1}{\varepsilon}F^*\rho^*$$

このように置けば，連続の方程式が自動的に満足される，逆に連続の方程式が成立する事から、この性質を持つ関数ψが存在する。今まで独立変数は，(x, τ) であるとして来たが，ここで (ψ, τ) を独立変数としてとる事にする。この事が可能であるための条件は次のように簡単に表わせる

$$\frac{\partial(\psi, \tau)}{\partial(x, \tau)} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \neq 0$$

従って，$\rho^* \neq 0$ ならば良いが，これは普通成立すると考えられ，又後で $t=0$ で成立すれば，$V=0$ の場合には以後成立する事が示される。以後独立変数を(ψ, τ)として，しばらく計算するが，独立変数として何を用いているかその都度示すことにする。

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \tau}\right)_\psi = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial \tau}\right)_x \Big/ \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_\tau = -F^*$$

$$\therefore \quad \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_\psi = -\mu^* F$$

これから、$x(t, \psi = const)$ が電子の移動の軌道となっている事が分かり，ψが軌道の印となっているのである。上の式を利用すれば，次の便利な式を得る事ができる。

$$\left(\frac{\partial F^*}{\partial \tau}\right)_\psi = \left(\frac{\partial F^*}{\partial x}\right)_\tau \left(\frac{\partial x}{\partial \tau}\right)_\psi + \left(\frac{\partial F^*}{\partial \tau}\right)_x$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} F^* \rho^* + \frac{1}{\varepsilon} \gamma F \exp\left[-\frac{2}{\varepsilon}\int_0^t \mu^* \gamma \, dt'\right]$$

$$+ \frac{1}{\mu^*} \exp\left[-\frac{2}{\varepsilon}\int_0^t \mu^* \gamma \, dt'\right] \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_x$$

$$= \frac{I(t)}{\varepsilon \mu^*} \exp\left[\frac{2}{\varepsilon}\int_0^t \mu^* \gamma \, dt'\right]$$

$$= \frac{1}{2d}\left(F^{*2}(0,t) - F^{*2}(d,\tau)\right) + \frac{\gamma V}{d\varepsilon} \exp\left[\frac{2}{\varepsilon}\int_0^t \mu^* \gamma \, dt'\right]$$

次に流れ関数の定義と，ポアソンの式を用いれば、

$$\left(\frac{\partial F^*}{\partial x}\right)_\tau = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_\tau$$

$$\therefore \quad F^* = \psi + g(\tau) + \frac{V}{d}$$

となりF^*は独立変数（ψ, τ）を用いて簡単に表わせる。V/dは便宜上つけたものであり，$g(0)=0$ とする。（ψの定義から，これは常に可能である）
次にxの方程式に上のF^*を代入することにより

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \tau}\right)_\psi = -F^* = -\psi - g(\tau) - \frac{V}{d}$$

$$\therefore \quad x = -\psi\tau - \int_0^\tau g(\tau)\,d\tau - \frac{V}{d}\tau + h^{-1}(\psi)$$

h^{-1}は任意関数であり，便宜上逆関数を用いた。ここで $V=0$ と$V\neq 0$の場合を分けて考える必要がある。後に示すように，$V=0$ の場合は，h^{-1}は初期条件のみによって決定されるのに対し，$V\neq 0$ の場合には，初期条件の他に境界条件が必要となる。従って，両者は別々に考えられなくてはならない。ここでは，より基本的な$V=0$ の場合から考える事にする。

$V=0$

$$\Psi = h\left(x + \Psi\tau + \int_0^\tau g(\tau)d\tau\right)$$

となるから $\tau=0$ とすれば

$$h(x) = \Psi(x, \tau=0) = F^*(x, \tau=0) = F(x, \tau=0)$$

となるから、$h(x)$は電界の初期値 $F(x, \tau=0) = F_0(x)$ に等しい。所が、明らかに $F_0(x)$は $[0, d]$ で定義されているだけだから

$$\Psi = F_0\left(x + \Psi\tau + \int_0^\tau g(\tau)d\tau\right)$$

としてよりためには、これを満足する Ψ が唯一存在する事を言えば良い。この事は後に示すことにし、ここではこれを仮定して先に進む

$$\Psi_0 \equiv \Psi(0, \tau)$$
$$\Psi_d \equiv \Psi(d, \tau)$$ とおくと

$$\Psi_0 = F_0\left(\Psi_0\tau + \int_0^\tau g(\tau)d\tau\right)$$

$$\Psi_d = F_0\left(d + \Psi_d\tau + \int_0^\tau g(\tau)d\tau\right)$$

$$\left(\frac{\partial F^*}{\partial \tau}\right)_\Psi = \frac{dg}{d\tau} = \frac{1}{2d}\left\{(\Psi_0 + g)^2 - (\Psi_d + g)^2\right\}$$

上の三つの関係式が，基本的なものであるが，積分微分方程式となり取り扱いに不便であるので，上の2つをτで微分して積分を消去し次の関係が得られる。

$$\frac{d\Psi_0}{d\tau} = -\frac{\Psi_0 + g}{\tau - \dfrac{1}{F_0'\left(\Psi_0 \tau + \int_0^\tau g(\tau)\,d\tau\right)}}$$

$$\equiv -\frac{\Psi_0 + g}{\tau + U(\Psi_0)}$$

ここで

$$U(\Psi) = \frac{-1}{F_0'\left(F_0^{-1}(\Psi)\right)}$$ とおいた

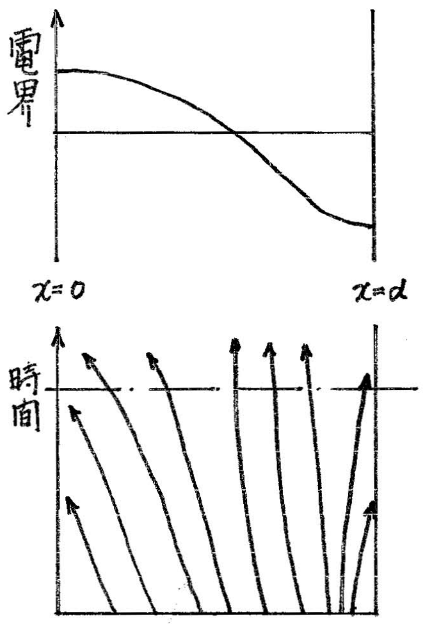
同様に

$$\frac{d\Psi_d}{d\tau} = -\frac{\Psi_d + g}{\tau + U(\Psi_d)}$$

分布について詳しく

電子注入を考えているから、F_0'は負であるからUは正となる。ここで、V=0の場合に初期値のみが必要である事を示そう。

短絡の場合には、電界は右図のようになり、$x=0$ では$F>0$，$x=d$ では $F<0$ であるから、それに伴って電子の流線は下図のようになり、外部から入る流線は存在しない。Ψは各流線につき定められているので、Ψはその初期値のみで確定する。この事は解析的にも簡単に示される。次に



$$\frac{d\Psi_0}{d\tau} = -\frac{F^*(0,\tau)}{\tau + U(\Psi_0)} < 0$$

となるから Ψ_0 は単調に減少する。同様にΨ_dは、単調に増加する。また界面電界の符号から

$$\Psi_0 > -g > \Psi_d$$

gの微分方程式は3つの領域で同一であるので次のように書き下しておく。

$$\frac{dg}{d\tau} = \frac{1}{2d}\left\{\left(\psi_0 + g + \frac{V}{d}\right)^2 - \left(\psi_d + g + \frac{V}{d}\right)^2\right\} + \frac{\gamma V}{d\varepsilon} exp\left[\frac{2}{\varepsilon}\int_0^t \mu^* \gamma \, dt'\right]$$

次にIIIにおいて，ψ_0を決定する方法を述べる。τ_dにおいて$x=d$を出発した流線に着目し，それが$x=0$に到達する時間をτとすると

$$\psi_0(\tau) = \psi_d(\tau_d)$$

となる。流線は次のように表わされる

$$x = d - \psi_d(\tau_d)(\tau_x - \tau_d) - \int_{\tau_d}^{\tau_x} g \, d\tau - \frac{V}{d}(\tau_x - \tau_d)$$

ここで $x=0$ として微分すれば

$$0 = -\frac{d\psi_d(\tau_d)}{d\tau_d}\frac{d\tau_d}{d\tau}(\tau - \tau_d) - \psi_d(\tau_d)\left(1 - \frac{d\tau_d}{d\tau}\right) - \frac{V}{d}\left(1 - \frac{d\tau_d}{d\tau}\right) - g(\tau) + g(\tau_d)\frac{d\tau_d}{d\tau}$$

$$\therefore \quad \frac{d\tau_d}{d\tau} = \frac{\psi_0(\tau) + g(\tau) + \frac{V}{d}}{\psi_d(\tau_d) + g(\tau_d) + \frac{V}{d} - (\tau - \tau_d)\frac{d\psi_d(\tau_d)}{d\tau_d}}$$

従って

$$\frac{d\psi_0(\tau)}{d\tau} = \frac{d\psi_d(\tau_d)}{d\tau_d}\frac{d\tau_d}{d\tau} = -\frac{\psi_0(\tau) + g(\tau) + \frac{V}{d}}{\tau - \tau_d + \frac{\varepsilon}{e n_d(\tau_d)} exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{t_d} \mu^* \gamma \, dt'\right]}$$

t_dはτ_dに対応するtである。$n_d=0$の場合には，上の関係式が非常に簡単になる事に注意しておく。